Anné universitaire 2018-2019
Session d'Automne 2018

Université IBN TOFAÏL

Ecole Nationale
Des
Sciences appliquées

Cycle préparatoire

Semestre 3

Cours de Calcul différentiel

Fiche 5:
Dérivées partielles
Et
Applications

Pr. Ch. Bensouda

Chapter 1 Dérivées partielles, plan tangent et vecteur normal:

1.1 Fonctions partielles et dérivées partielles:

1.1.1 Définitions:

Définition 1:

Considérons f un champ scalaire défini sur un ouvert U de $\mathbb{R}^d$ et soit $a \in U$ un point fixé. Il existe alors $\eta > 0$ tel que

$$V = \left(\prod_{k=1}^{d}]a_k - \eta, a_k + \eta[\right) \subset U.$$

- Pour tout $k = 1, 2, ..., d$, on considère la fonction réelle d'une seule variable réelle dite fonction partielle donnée par

$$\begin{array}{rcl} (f_{a_k})(t) & = & f(a_1, .., a_{k-1}, t, a_{k+1}, .., a_d) \\ t & \in &]a_k - \eta, a_k + \eta[\,. \end{array}$$

Définition 2:

Soit f un champ scalaire défini sur un ouvert U de $\mathbb{R}^d$ et soit $a \in U$ un point fixé.

- Pour tout $k = 1, 2, ..., d$; on dit que le champ f admet une dérivée partielle en $a \in U$, par rapport à la variable x_k, si la fonction partielle (f_{a_k}) admet un nombre dérivée en a_k noté

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)(a) := (f_{a_k})'(a_k) = \lim_{\substack{t \to a_k \\ \neq}} \left(\frac{f_{a_k}(t) - f_{a_k}(a_k)}{t - a_k}\right) \in \mathbb{R}.$$

En particulier:

Considérons f un champ scalaire de trois variables définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^3$ et à valeurs réelles.

$$\begin{array}{rcl} f & : & U \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \longmapsto & f(x, y, z) \end{array}$$

- Pour tout Soit $(a, b, c) \in U$ fixé; il existe alors $\eta > 0$ tel que

$$\begin{array}{rcl} V & = &]a - \eta, a + \eta[\times]b - \eta, b + \eta[\times]c - \eta, c + \eta[\\ & \subset & U. \end{array}$$

On a alors trois fonctions réelles d'une seule variable réelle dites fonctions partielles

$$f(-, b, c)(t) = f(t, b, c)\ ;\ t \in]a - \eta, a + \eta[$$

et

$$f(a, -, c)(t) = f(a, t, c)\ ;\ t \in]b - \eta, b + \eta[$$

et aussi

$$f(a,b,-)(t)=f(a,b,t)\ ;\ t\in\left]c-\eta,c+\eta\right[.$$

- La fonction f admet une dérivée partielle par rapport à x au point $(a,b,c)\in U$ si le nombre dérivé

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(a,b,c)=\lim_{\substack{x\to a\\ \neq}}\left(\frac{f(x,b,c)-f(a,b,c)}{x-a}\right)\text{ existe dans }\mathbb{R}.$$

- La fonction f admet une dérivée partielle par rapport à y au point $(a,b,c)\in U$ si le nombre dérivé

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a,b,c)=\lim_{\substack{y\to b\\ \neq}}\left(\frac{f(a,y,c)-f(a,b,c)}{y-b}\right)\text{ existe dans }\mathbb{R}.$$

- La fonction f admet une dérivée partielle par rapport à z au point $(a,b,c)\in U$ si le nombre dérivé

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)(a,b,c)=\lim_{\substack{z\to c\\ \neq}}\left(\frac{f(a,b,z)-f(a,b,c)}{z-c}\right)\text{ existe dans }\mathbb{R}.$$

Exemple:

- Soit le champ scalaire

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R}^3\longrightarrow[-1,1] \\ (x,y,z) & \longmapsto & f(x,y,z)=\sin\left(\dfrac{x+y}{z}\right) \end{array}$$

dont le domaine de définition

$$D_f=(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*).$$

- Pour tout

$$(a,b,c)\in D_f;$$

on a trois fonctions partielles.

- La fonction partielle

$$\begin{array}{rcl} f_a & \equiv & f(-,b,c):\mathbb{R}\longrightarrow[-1,1] \\ x & \longmapsto & f(x,b,c)=\sin\left(\dfrac{x+b}{c}\right) \end{array}$$

admet un nombre dérivé en $a\in\mathbb{R}$ dit dérivée partielle, par rapport à la variable x, du champ f en

$$(a,b,c)\in D_f$$

et on a

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(a,b,c) &= \lim_{\substack{x\to a\\ \neq}}\left(\frac{f(x,b,c)-f(a,b,c)}{x-a}\right) \\ &= \lim_{\substack{x\to a\\ \neq}}\left(\frac{\sin\left(\frac{x+b}{c}\right)-\sin\left(\frac{a+b}{c}\right)}{x-a}\right) \\ &= \left(\frac{1}{c}\right)\cos\left(\frac{a+b}{c}\right)\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

- La fonction partielle

$$\begin{aligned} f_b \quad &\equiv \quad f(a,-,c) : \mathbb{R} \longrightarrow [-1,1] \\ y \quad &\longmapsto \quad f(a,y,c) = \sin\left(\frac{a+y}{c}\right) \end{aligned}$$

admet un nombre dérivé en $b \in \mathbb{R}$ dit dérivée partielle, par rapport à la variable y, du champ f en

$$(a,b,c) \in D_f$$

et on a

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a,b,c) &= \lim_{\substack{y \to b \\ \neq}} \left(\frac{f(a,y,c) - f(a,b,c)}{x-a}\right) \\ &= \lim_{\substack{y \to b \\ \neq}} \left(\frac{\sin\left(\frac{a+y}{c}\right) - \sin\left(\frac{a+b}{c}\right)}{y-b}\right) \\ &= \left(\frac{1}{c}\right)\cos\left(\frac{a+b}{c}\right) \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

- La fonction partielle

$$\begin{aligned} f_c \quad &\equiv \quad f(a,b,-) : \mathbb{R}^* \longrightarrow [-1,1] \\ z \quad &\longmapsto \quad f(a,b,z) = \sin\left(\frac{a+b}{z}\right) \end{aligned}$$

admet un nombre dérivé en $c \in \mathbb{R}^*$ dit dérivée partielle, par rapport à la variable z, du champ f en

$$(a,b,c) \in D_f$$

et on a

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)(a,b,c) &= \lim_{\substack{z \to c \\ \neq}} \left(\frac{f(a,b,z) - f(a,b,c)}{z-c}\right) \\ &= \lim_{\substack{z \to c \\ \neq}} \left(\frac{\sin\left(\frac{a+b}{z}\right) - \sin\left(\frac{a+b}{c}\right)}{z-c}\right) \\ &= \left(\frac{-1}{c^2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{c}\right) \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Remarque:

- Un champ scalaire f qui admet des dérivées partielles première en a n'est pas nécessairement continue en ce point.

- On considère le champ scalaire

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \quad &\longmapsto \quad f(x,y) \end{aligned}$$

donné par

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{2xy}{x^2+y^2}\right) \text{ si } & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad \text{si} & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

- Le champ scalaire f admet des dérivées partielles premières en

$$(0,0) \in D_f = \mathbb{R}^2$$

et on a

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ \neq}} \left(\frac{f(x,0) - f(0,0)}{x}\right) = 0$$

et aussi on a

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0) = \lim_{\substack{y \to 0 \\ \neq}} \left(\frac{f(0,y) - f(0,0)}{y}\right) = 0.$$

- Suivant la direction $y = x$ on a

$$f(x,x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

et on a

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ \neq}} f(x,x) = 1 \neq f(0,0).$$

- Suivant la direction $y = -x$ on a

$$f(x,-x) = \begin{cases} -1 \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

et on a

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ \neq}} f(x,-x) = -1 \neq f(0,0).$$

- Il s'en suit que la fonction f n'est pas continue en $(0,0)$.

1.1.2 Interprétation géométrique:

Considérons f un champ scalaire défini sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$ et soient $\mathcal{S}$ la surface d'équation

$$z = f(x,y) \ ; \ (x,y) \in U$$

passant par le point

$$(a, b, f(a,b)) \in \mathcal{S} \ ; \ (a,b) \in U$$

- Le plan d'équation

$$y = b$$

rencontre la surface $\mathcal{S}$ en une courbe $\mathcal{C}_b$ donnée par

$$\begin{cases} x = s \\ y = b \\ z = f_b(s) = f(s,b) \end{cases} ; \ s \in \{x \in \mathbb{R} \ / \ (x,b) \in U\}.$$

- La pente de la tangente à cette courbe $\mathcal{C}_b$ au point

$$(a, b, f(a,b)) \in (\mathcal{S} \cap \mathcal{C}_b)$$

est donnée par

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(a,b) = \lim_{\substack{s \to a \\ \neq}} \left(\frac{f(s,b) - f(a,b)}{s-a}\right) \in \mathbb{R}$$

- De même; le plan d'équation

$$x = a$$

rencontre la surface $\mathcal{S}$ en une courbe $\mathcal{C}_a$ donnée par

$$\begin{cases} x = a \\ y = t \\ z = f_a(t) = f(a,t) \end{cases} ; \ t \in \{y \in \mathbb{R} \ / \ (a,y) \in U\}.$$

- La pente de la tangente à cette courbe $\mathcal{C}_a$ au point

$$(a, b, f(a,b)) \in (\mathcal{S} \cap \mathcal{C}_a)$$

est donnée par

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a,b) = \lim_{\substack{t \to b \\ \neq}} \left(\frac{f(a,t) - f(a,b)}{t-b}\right) \in \mathbb{R}$$

Définition 3:

Soit f un champ scalaire défini sur un ouvert U de $\mathbb{R}^d$ et soit $A \subset U$ une partie donnée.

- Pour tout $k = 1, 2, ..., d$; on dit que le champ f admet une dérivée partielle sur $A \subset U$, par rapport à la variable x_k, si la fonction partielle (f_{x_k}) admet un nombre dérivée en tout point x_k où

$$x = (x_1, ..., x_k, ..., x_d) \in A \subset U.$$

On obtient alors un champ scalaire

$$\begin{array}{rcl} \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_k}\right) & : & A \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_k}\right)(x) \end{array}$$

1.1.3 Exemples:

1- Le champ scalaire

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x,y) = \left(x^2 \sin y\right) \end{array}$$

admet des fonctions dérivées partielles premières sur $\mathbb{R}^2$ et on a

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) = (2x \sin y) \ ; \ (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

et aussi on a

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) = \left(x^2 \cos y\right) \ ; \ (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

2- Le champ scalaire

$$\begin{array}{rcl} g & : & \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(x,y,z) = \left(\dfrac{2xy}{1 + xz + yz}\right) \end{array}$$

dont le domaine de définition

$$D_g = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ (1 + xy + yz) \neq 0\right\}$$

admet des fonctions dérivées partielles premières sur D_g et on a

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)(x, y, z) = \left(\frac{2y\,(1 + yz)}{(1 + xz + yz)^2}\right) \ ; \ (x, y, z) \in D_g,$$

on a aussi

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y, z) = \left(\frac{2x\,(1 + xz)}{(1 + xz + yz)^2}\right) \ ; \ (x, y, z) \in D_g$$

et aussi

$$\frac{\partial g}{\partial z}(x, y, z) = \left(\frac{-2xy\,(x + y)}{(1 + xz + yz)^2}\right) \ ; \ (x, y, z) \in D_g.$$

- On obtient ainsi la relation aux dérivées partielles

$$x\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)(x, y, z) = \left(\frac{1 + yz}{1 + xz + yz}\right) g\,(x, y, z)\,,$$

la relation aux dérivées partielles

$$y\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)(x, y, z) = \left(\frac{1 + xz}{1 + xz + yz}\right) g\,(x, y, z)$$

et la relation aux dérivées partielles

$$z\left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)(x, y, z) = -\left(\frac{xz + yz}{1 + xz + yz}\right) g\,(x, y, z)$$

Ou encore la relation aux dérivées partielles

$$x\frac{\partial g}{\partial x} + y\frac{\partial g}{\partial y} + z\frac{\partial g}{\partial z} = \left(\frac{2g}{1 + xz + yz}\right).$$

- On dit alors que le champ g est une solution particulière de l'équation différentielle aux dérivées partielles

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = \left(\frac{2u}{1 + xz + yz}\right).$$

dont l'inconnue est la fonction u.

3- Le champ scalaire

$$\begin{array}{rcl} \rho & : & \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \rho\,(x, y, z) = \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right) \end{array}$$

admet des fonctions dérivées partielles premières sur

$$A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ (x, y, z) \neq (0, 0, 0)\right\}$$

et on a

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)(x, y, z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)(x, y, z) \in A$$

on a aussi

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)(x,y,z) &= \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)\\ (x,y,z) &\in A\end{aligned}$$

et aussi

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)(x,y,z) &= \left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)\\ (x,y,z) &\in A.\end{aligned}$$

- On obtient ainsi la relation aux dérivées partielles

$$x\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)+y\left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)+z\left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)=\rho.$$

- On dit alors que le champ ρ est une solution particulière de l'équation différentielle aux dérivées partielles

$$x\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+y\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)+z\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)=u$$

dont l'inconnue est la fonction u.

1.2 Plan tangent et vecteur normal:

1.2.1 Introduction et définitions:

Introduction:

Soit f un champ scalaire défini sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$.

- Considérons la surface $\mathcal{S}$ d'équation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{l} x=s \\ y=t \\ z=f(s,t)\end{array}\right. \quad ; \ (s,t)\in U.$$

- Un point

$$P=(a,b,c)\in\mathcal{S}.$$

si

$$(a,b)\in U \text{ et } c=f(a,b).$$

- Une courbe $\mathcal{C}$ de la surface $\mathcal{S}$ est donnée par la paramétrisation

$$\left\{\begin{array}{c} x=s \\ y=\varphi(s) \\ z=f(s,\varphi(s))\end{array}\right. \quad ; \ (s,\varphi(s))\in U.$$

- Une telle courbe $\mathcal{C}$ de la surface $\mathcal{S}$ passe par le point

$$P = (a, b, f(a, b)) \in \mathcal{S} \text{ si } b = \varphi(a).$$

Définition:

- *On dira que la surface $\mathcal{S}$ est "lisse" au voisinage de*

$$P = (a, b, f(a, b)) \in \mathcal{S}$$

s'il existe un plan $\mathcal{P}$ passant par ce point P et qui contient toute droite tangente en P à toute courbe $\mathcal{C}$ de la surface $\mathcal{S}$ qui passe par ce point

$$P = (a, b, f(a, b)) \in (\mathcal{S} \cap \mathcal{C} \cap \mathcal{P}).$$

- *Un tel plan , quand il existe, sera dit plan tangent à la surface $\mathcal{S}$ au point*

$$P = (a, b, f(a, b)) \in \mathcal{S}.$$

- *Un vecteur $n \in \mathbb{R}^3$ sera dit normal à une surface $\mathcal{S}$, au point*

$$P = (a, b, f(a, b)) \in \mathcal{S}$$

s'il est normal au plan $\mathcal{P}$ plan tangent à la surface $\mathcal{S}$ en ce point

$$P = (a, b, f(a, b)) \in (\mathcal{S} \cap \mathcal{P}).$$

Remarques:

- Soit f un champ scalaire défini sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ qui admet des dérivée partielles premières en

$$(a, b) \in U.$$

- On considère la surface $\mathcal{S}$ d'équation paramétrique

$$\begin{cases} x = s \\ y = t \\ z = f(s, t) \end{cases} \quad ; \ (s, t) \in U$$

lisse au voisinage du point

$$P = (a, b, f(a, b)) \in \mathcal{S}.$$

- Alors le plan tangent à la surface $\mathcal{S}$ en

$$P = (a, b, f(a, b)) \in \mathcal{S}.$$

est donné par l'équation

$$z = z_0 + \alpha(x - a) + \beta(y - b) \ ; \ (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

- Ce plan $\mathcal{P}$ passe par le point

$$P = (a, b, f(a, b)) \in (\mathcal{S} \cap \mathcal{P}).$$

Il s'en suit que

$$z_0 = f(a, b).$$

- Le plan $\mathcal{P}_a$ d'équation

$$x = a = cste$$

rencontre la surface $\mathcal{S}$ en la courbe

$$\mathcal{C}_a = (\mathcal{S} \cap \mathcal{P}_a)$$

d'équation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{c} x = a \\ y = t \\ z = f\,(a,t) \end{array}\right. \quad ; \; (a,t) \in U.$$

dont l'équation de la tangente en

$$P = (a, b, f(a,b)) \in \mathcal{C}_a = (\mathcal{S} \cap \mathcal{P}_a)$$

est donnée par

$$z = f(a,b) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a,b)\,(y-b)$$

et vérifie l'équation du plan tangent $\mathcal{P}$ au point

$$P = (a, b, f(a,b)) \in (\mathcal{S} \cap \mathcal{P})\,.$$

On a alors

$$z = f(a,b) + \beta\,(y-b)$$

et on obtient

$$\beta = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a,b) \in \mathbb{R}.$$

- De même; le plan $\mathcal{P}_b$ d'équation

$$y = b = cste$$

rencontre la surface $\mathcal{S}$ en la courbe

$$\mathcal{C}_b = (\mathcal{S} \cap \mathcal{P}_b)$$

d'équation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{c} x = s \\ y = b \\ z = f\,(s,b) \end{array}\right. \quad ; \; (s,b) \in U.$$

dont l'équation de la tangente en

$$P = (a, b, f(a,b)) \in \mathcal{C}_b = (\mathcal{S} \cap \mathcal{P}_b)$$

est donnée par

$$z = f(a,b) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(a,b)\,(x-a)$$

et vérifie l'équation du plan tangent $\mathcal{P}$ au point

$$P = (a, b, f(a,b)) \in (\mathcal{S} \cap \mathcal{P})\,.$$

On a alors
$$z = f(a,b) + \alpha\,(x-a)$$
et on obtient
$$\alpha = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(a,b) \in \mathbb{R}.$$

- Finalement, l'équation du plan tangent à la surface $\mathcal{S}$ au point
$$P = (a,b,f(a,b)) \in (\mathcal{S} \cap \mathcal{P})$$
est donné par l'équation
$$z = f(a,b) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(a,b)\,(x-a) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a,b)\,(y-b)\,.$$

- Par ailleurs; on considère le vecteur
$$n = \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(a,b), \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a,b), -1\right) \in \mathbb{R}^3.$$
Pour tout point du plan tangent
$$M = (x,y,z) \in \mathcal{P}$$
on a
$$\begin{aligned} n.PM &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \\ -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \\ z-f(a,b) \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(a,b)\,(x-a) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a,b)\,(y-b) + f(a,b) - z = 0. \end{aligned}$$

Par conséquent le vecteur
$$n = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(a,b) \\ \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a,b) \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$
est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$, plan tangent à la surface $\mathcal{S}$ au point
$$P = (a,b,f(a,b)) \in (\mathcal{S} \cap \mathcal{P})$$
donc normal à la surface $\mathcal{S}$ au point
$$P = (a,b,f(a,b)) \in \mathcal{S}.$$

- Il s'en suit que l'équation paramétrique de la droite normale à la surface $\mathcal{S}$ au point
$$P = (a,b,f(a,b)) \in \mathcal{S}$$
donnée par
$$\Lambda = \left\{ M = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; PM = \lambda n\;,\; \lambda \in \mathbb{R}\; \right\}$$

est

$$\begin{cases} x-a=\lambda\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(a,b) \\ y-b=\lambda\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a,b) \\ z-f(a,b)=-\lambda \end{cases} ;\ \lambda\in\mathbb{R}$$

- Et l'équation cartésienne de la droite normale à la surface $\mathcal{S}$ au point

$$P=(a,b,f(a,b))\in\mathcal{S}$$

est donnée par

$$\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \\ z-f(a,b) \end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \\ -1 \end{pmatrix}=0$$

ou encore

$$\begin{cases} (x-a)\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)-(y-b)\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=0 \\ (x-a)+(z-f(a,b))\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=0 \\ (y-b)+(z-f(a,b))\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0 \end{cases}.$$

Si de plus on a

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(a,b)\neq 0 \text{ et } \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a,b)\neq 0,$$

alors l'équation cartésienne de la droite normale à la surface $\mathcal{S}$ au point

$$P=(a,b,f(a,b))\in\mathcal{S}$$

s'écrit

$$\left(\frac{x-a}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(a,b)}\right)=\left(\frac{y-b}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a,b)}\right)=\left(\frac{z-f(a,b)}{-1}\right).$$

1.2.2 Exemples:

1- Soit le champ scalaire

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y)=\sin(xy) \end{array}$$

On considère la surface $\mathcal{S}$ d'équation

$$z=\sin(xy)\in\mathbb{R}\ ;\ (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

- La surface $\mathcal{S}$ admet pour équation paramétrique

$$\begin{cases} x=s \\ y=t \\ z=\sin(st) \end{cases} ;\ (s,t)\in\mathbb{R}^2.$$

et passe par le point

$$P=\left(\frac{\pi}{3},-1,f\left(\frac{\pi}{3},-1\right)\right)=\left(\frac{\pi}{3},-1,\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)\in\mathcal{S}.$$

- Le champ

$$f(x,y) = \sin(xy) \in \mathbb{R}\ ;\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

admet des dérivées partielles premières continues. La surface $\mathcal{S}$ est lisse au voisinage du point

$$P = \left(\frac{\pi}{3}, -1, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right) \in \mathcal{S}$$

et admet un plan tangent $\mathcal{P}$ donnée par

$$\begin{aligned} z &= f\left(\frac{\pi}{3}, -1\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\left(\frac{\pi}{3}, -1\right)\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\left(\frac{\pi}{3}, -1\right)(y+1). \\ &= \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{6}(y+1) \end{aligned}$$

ou encore

$$3x - \pi y + 6z = 2\pi - 3\sqrt{3}.$$

- L'équation de la droite normale est donnée par

$$\left(\frac{x - \frac{\pi}{3}}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\left(\frac{\pi}{3}, -1\right)}\right) = \left(\frac{y+1}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\left(\frac{\pi}{3}, -1\right)}\right) = \left(\frac{z + \frac{\sqrt{3}}{2}}{-1}\right)$$

d'ou

$$\left(\frac{x - \frac{\pi}{3}}{-\frac{1}{2}}\right) = \left(\frac{y+1}{\frac{\pi}{6}}\right) = \left(\frac{z + \frac{\sqrt{3}}{2}}{-1}\right)$$

ou encore

$$\left(\frac{2\pi - 6x}{3}\right) = \left(\frac{6y+6}{\pi}\right) = \left(\frac{2z + \sqrt{3}}{-2}\right).$$

2- Soit le champ scalaire

$$\begin{array}{rcl} g & : & \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & g(x,y) \end{array}$$

donnée par

$$g(x,y) = \left(x^2 - 4xy - 2y^2 + 12x - 12y - 1\right)\ ;\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

On considère la surface $\mathcal{S}$ d'équation

$$z = g(x,y) \in \mathbb{R}\ ;\ (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

- La surface $\mathcal{S}$ admet pour équation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{c} x = s \\ y = t \\ z = (s^2 - 4st - 2t^2 + 12s - 12t - 1) \end{array}\right. .$$

- Le champ

$$z = g(x,y) \in \mathbb{R}\ ;\ (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

admet des dérivées partielles premières continues. La surface $\mathcal{S}$ est lisse au voisinage de tout point

$$P = (a, b, g(a, b)) \in \mathcal{S}$$

et admet un plan tangent $\mathcal{P}$ en

$$P = (a, b, g(a, b)) \in (\mathcal{S} \cap \mathcal{P})$$

donnée par

$$z = g(a,b) + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)(a,b)(x-a) + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)(a,b)(y-b).$$

- Le plan tangent $\mathcal{P}$ en

$$P = (a, b, g(a, b)) \in (\mathcal{S} \cap \mathcal{P})$$

est horizontal si

$$z = z_0 = g(a,b) = cste \in \mathbb{R}$$

Par identification; le point

$$P = (a, b, g(a, b)) \in (\mathcal{S} \cap \mathcal{P})$$

vérifie le système

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)(a,b) = \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)(a,b) = 0.$$

Il s'en suit que les points

$$P = (a, b, g(a, b)) \in \mathcal{S}$$

de la surface $\mathcal{S}$ en lesquels le plan tangent $\mathcal{P}$ est horizontal sont les solutions du système

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)(x,y) = 2x - 4y + 12 = 0 \\ \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)(x,y) = x + y + 3 = 0 \end{cases}$$

ou encore

$$x = -4 \text{ et } y = 1.$$

Ainsi l'unique point en lequel le plan tangent $\mathcal{P}$ à la surface $\mathcal{S}$ est horizontal est

$$P = (-4, 1, g(-4,1)) = (-4, 1, -31).$$

3- Soit le champ scalaire

$$\begin{array}{rcl} h & : & \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & h(x,y) = \left(x^2 - y^2\right) \end{array}$$

On considère la paraboloïde $\mathcal{S}$ d'équation paramétrique

$$\begin{cases} x = s \\ y = t \\ z = h(s,t) = s^2 - t^2 \end{cases}.$$

- Par définition; la distance d'un point M à un ensemble E est donnée par

$$dis(M, E) = \inf_{P \in E} dis(P, M).$$

Ainsi, la distance du point
$$M=(3,0,0)$$
à la paraboloïde $\mathcal{S}$ est donnée par
$$dis(M,\mathcal{S})=\inf_{P\in\mathcal{S}} dis\left(P,M\right).$$

- Pour la distance euclidienne associée à la norme $\|-\|_2$, cette borne inférieure est atteinte en un des points
$$P=(a,b,h\left(a,b\right))\in\mathcal{S}$$
tel que le point
$$M=(3,0,0)$$
soit sur la droite normale à la surface $\mathcal{S}$ en
$$P=(a,b,h\left(a,b\right))\in\mathcal{S}$$

- Déterminons alors les points
$$P=(x,y,h\left(x,y\right))\in\mathcal{S}$$
tel que le point
$$M=(3,0,0)$$
soit sur la droite normale à la surface $\mathcal{S}$ en
$$P=(x,y,h\left(x,y\right))\in\mathcal{S}$$

- Le point
$$P=(x,y,f\left(x,y\right))\in\mathcal{S}$$
vérifie alors le système
$$\begin{cases} 3-x=\lambda\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)(x,y)=2\lambda x \\ -y=\lambda\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)(x,y)=-2\lambda y \\ f\left(x,y\right)=x^2-y^2=\lambda \end{cases}$$

- Si $y\neq 0$, on obtient
$$\frac{1}{2}=\left(\frac{3-x}{2x}\right)=\left(x^2-y^2\right)$$
ou encore
$$x=\left(\frac{3}{2}\right) \text{ et } y=\left(\frac{\pm\sqrt{7}}{2}\right).$$
Ainsi, on obtient les points
$$P_1=\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{7}}{2},\frac{1}{2}\right) \text{ et } P_2=\left(\frac{3}{2},\frac{-\sqrt{7}}{2},\frac{1}{2}\right).$$

- Si $y=0$; le point
$$P=(x,0,z)\in\mathcal{S}$$

vérifie le système

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = z \\ 2x^3 + x - 3 = 0 \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = z \\ (x-1)\left(2x^2 + 2x + 3\right) = 0 \end{cases}$$

Ainsi, on obtient le point

$$P_3 = (1, 0, 1) \in \mathcal{S}.$$

En fin la distance du point

$$M = (3, 0, 0)$$

à la paraboloïde $\mathcal{S}$ est donnée par

$$\begin{aligned} dis(M, \mathcal{S}) &= \inf_{P \in \mathcal{S}} dis\,(P, M) \\ &= \min_{1 \leq k \leq 3} dis(M, P_k) \\ &= \min\left(\sqrt{5}, \frac{\sqrt{17}}{2}\right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{17}}{2}\right). \end{aligned}$$